

Teorias Neo-Newtonianas

Júlio C. Fabris* e Hermano E.S. Velten†

Departamento de Física - UFES, Vitória, ES, Brasil

30 de novembro de 2014

Resumo

A teoria da Relatividade Geral é a moderna teoria da gravitação, tendo substituído a teoria newtoniana na descrição dos fenômenos gravitacionais. No entanto, apesar dos grandes sucessos obtidos pela teoria da Relatividade Geral, a teoria gravitacional newtoniana continua sendo largamente empregada devido ao fato que a teoria da Relatividade Geral incorpora, na maior parte dos casos, apenas pequenas correções às previsões newtonianas. Além disso, a teoria newtoniana possui uma grande simplicidade técnica e conceitual quando comparada com a teoria relativista. Neste texto, discutimos a possibilidade de estender a teoria newtoniana tradicional de forma a incorporar efeitos tipicamente relativistas mas guardando a referida simplicidade técnica e conceitual. Denominamos estas extensões de *teorias neo-newtonianas*. Estas teorias são discutidas principalmente nos contextos cosmológico e da astrofísica de objetos compactos.

*fabris@pq.cnpq.br

†velten@pq.cnpq.br

1 Introdução

A teoria newtoniana da gravitação, expressa matematicamente pela lei do inverso do quadrado da distância, foi durante muito tempo um dos sucessos científicos mais notáveis da história da ciência. Durante pelo menos os dois primeiros séculos que seguiram sua formulação, a gravitação newtoniana explicou todos os fenômenos gravitacionais observados, desde a queda dos corpos na superfície terrestre até o movimento dos planetas no sistema solar. Quando se acreditou que ela estava errada, pois Urano parecia seguir uma órbita distinta da prevista, a certeza que ela era uma teoria correta levou à predição da existência de um outro planeta, com massa e órbita bem definidas. A descoberta de Netuno, com todas as características previstas, representou um triunfo indubitável: não apenas a teoria explicava o que já se conhecia, mas tinha poder preditivo, sugerindo a existência do que ainda não havia sido observado. Mesmo hoje, quando a teoria newtoniana não é tida mais como a correta teoria gravitacional, ela continua sendo utilizada em diversas situações em astrofísica e cosmologia.

A emergência da teoria da relatividade restrita no início do século XX levou à substituição da mecânica newtoniana pela mecânica relativista. Essa última, por sua vez, empregava como grupo de simetria fundamental o grupo de Lorentz, em vez do grupo de Galileu utilizado na mecânica newtoniana. Ao mesmo tempo, em íntima relação com o uso do grupo de Lorentz como estrutura matemática fundamental, a mecânica relativista estabelecia que há uma velocidade limite na natureza, a velocidade da luz c . No entanto, para velocidades muito inferiores à da luz, os resultados da mecânica relativista são praticamente indistinguíveis dos resultados da mecânica newtoniana. Isto faz com que o uso de mecânica relativista, na prática, ocorra apenas em algumas situações, a maior parte delas obtidas em sofisticados laboratórios e aceleradores de partículas.

A teoria da relatividade geral substituiu a gravitação newtoniana, sendo a moderna teoria da gravitação. Além de incorporar conceitos da mecânica relativista, como a velocidade da luz como velocidade limite, a teoria da relatividade geral substitui a idéia de força gravitacional pela de curvatura do espaço-tempo. O grupo fundamental passa a ser o grupo de difeomorfismo oriundo da geometria diferencial, e que atua em variedades geométricas. Mas, como ocorre no caso da mecânica relativista, a teoria gravitacional newtoniana é obtida da teoria da relatividade geral no limite em que as velocidades são pequenas comparadas com a velocidade da luz e o campo gravitacional é fraco¹. Na maior parte dos casos, incluindo sistemas astronômicos como galáxias e aglomerados de galáxias, a gravitação newtoniana pode ser usada sem maiores problemas. Já em menores escalas, sistemas estelares como anãs brancas também são bem descritas pela teoria newtoniana, mas objetos estelares super compactos, como estrelas de nêutrons, requerem o uso da teoria da relatividade geral.

Os estudos em cosmologia, que compreendem as maiores escalas conhecidas, revelam aspectos curiosos do uso ou da Relatividade Geral ou da teoria newtoniana, segundo o domínio de aplicação de cada uma destas teorias. Quando

¹O que significa um campo gravitacional *fraco*, conceito que requer um valor de referência, será definido mais tarde.

a Relatividade Geral foi formulada com a estrutura que conhecemos hoje, em 1915, as informações que se tinha sobre o que chamamos de *nosso universo* eram muito limitadas: sequer existia a noção da galáxia; os estudos cosmológicos eram incipientes, para não dizer inexistentes. A complexidade da nova teoria, seu caráter altamente não linear, forçava a busca de soluções que exibiam altas simetrias. O interesse evidente pelo estudo de estrelas (objetos sobre os quais já se tinha muitas informações), determinou a busca de soluções estáticas com simetria esférica. Focalizou-se posteriormente em soluções que poderiam representar o universo, suposto inicialmente homogêneo, isotrópico e estático, configuração que permitia se encontrar soluções exatas, mas que logo se revelaram instáveis. Um pouco mais tarde, soluções dinâmicas, representando o que hoje nós denominamos universo homogêneo e isotrópico em expansão, foram determinadas por Friedmann e Lemaître [1, 2].

A partir deste momento, e das descoberta que o universo é formado por galáxias, e que estas galáxias estão se afastando umas das outras, caracterizando a expansão cósmica [2, 3], deu-se início aos estudos mais rigorosos de cosmologia. Tudo isto foi feito dentro do contexto da teoria da Relatividade Geral. Apenas na década de 30, quando os estudos do universo feitos no contexto relativista já adquiriam bases mais sólidas, foi que se tentou construir uma cosmologia no contexto da teoria newtoniana: a teoria gravitacional mais antiga e mais simples encontrou sua aplicação em cosmologia depois que a teoria gravitacional mais recente e complexa tinha se apoderado deste campo de estudo [4, 5].

No entanto, a teoria newtoniana encontrou logo um espaço de aplicação na cosmologia. Na descrição do universo que conhecemos hoje, que se expande e se esfria com o passar do tempo, o universo teria passado por quatro fases: a fase primordial, ainda sob estudos, e que talvez requeira a compreensão de efeitos quânticos em gravitação; a fase radiativa, onde o universo é dominado por um gás de fótons e de partículas relativistas; a fase material, na qual as estruturas cósmicas como as galáxias se formam, onde o universo é dominado por um fluido de matéria sem pressão; e a fase atual, onde o universo parece ser dominado por um fluido exótico, dito energia escura, que conduz à expansão acelerada do universo. A teoria da Relatividade Geral tem uma característica fundamental que a torna imprescindível no estudo destas fases: a pressão do fluido desempenha um papel ativo, sendo também fonte do campo gravitacional, algo que não tem equivalente na teoria newtoniana.

No entanto, na fase material, onde a pressão é suposta nula, a teoria newtoniana poderia ser igualmente aplicada. Como esta é a fase de formação das estruturas, o que exige complexos estudos perturbativos, a teoria newtoniana encontra ali uma aplicação conveniente, dada à sua simplicidade técnica e conceitual. Aliás, os modernos estudos de formação de estruturas em um universo em expansão utilizando simulações numéricas, requerem o uso da teoria newtoniana, mesmo que isto implique limitações ao se tentar introduzir componentes em que a pressão desempenha um papel mais importante, como é o caso da energia escura.

É possível estender os estudos newtonianos para as situações onde a pressão desempenha um papel gravitacional ativo? Tenta-se responder a esta pergunta

desde os anos 50. Se isto for possível, teríamos uma importante ferramenta em mãos, com impactos profundos nos estudos de formação de estrutura no universo (incluindo as simulações numéricas), na determinação dos observáveis em cosmologia e gravitação (que na teoria newtoniana possuem um sentido mais direto), e da consequente comparação da observação com a teoria, questão central hoje nos estudos de fenômenos gravitacionais. Denominaremos tais possíveis extensões da teoria newtoniana de *teorias neo-newtonianas* [6, 7, 8]. Descrever a busca de uma formação consistente de uma teoria neo-newtoniana é o objeto deste texto. Sugerimos também a leitura da referência [9] sobre o mesmo assunto.

No que se segue, revisaremos primeiro a formulação newtoniana usual (próxima seção), a formulação relativista (seção 3), ambas no contexto cosmológico. Na seção 4 discutiremos como podemos tentar incorporar a pressão como fonte do campo gravitacional, o que caracterizaria a teoria neo-newtoniana, discutindo suas aplicação à cosmologia e ao estudo de estrelas nas seções 5 e 6, respectivamente. Na seção 7, apresentamos nossas conclusões.

2 As equações do fluido newtoniano em presença de um campo gravitacional

A descrição de sistemas auto-gravitantes na teoria newtoniana se faz mais adequadamente usando uma descrição de fluidos, pelo menos para os propósitos que temos em mente, a cosmologia e objetos estelares. Neste caso, o conjunto equações é,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi, \quad (2)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \quad (3)$$

Nestas equações, ρ representa a densidade do fluido, p é a pressão correspondente, \vec{v} é o campo de velocidade, ϕ é o potencial gravitacional. A equação (1), denominada como *equação da continuidade*, expressa a conservação da matéria. A equação (2), denominada *equação de Euler*, nada mais é que a segunda lei de Newton re-expressa em termos das variáveis do fluido, sendo que o lado direito corresponde ao balanço das forças às quais o fluido está submetido, neste caso o gradiente da pressão e a força gravitacional. A equação (3), denominada *equação de Poisson*, é a reformulação diferencial da lei do inverso do quadrado da distância do campo gravitacional. Observe-se que apenas a matéria é fonte do campo gravitacional, algo óbvio no contexto newtoniano, mas menos evidente no contexto relativista.

Consideremos agora a aplicação destas equações à cosmologia. Neste caso, primeiramente tentamos incorporar os elementos básicos do universo observado:

ele é homogêneo e isotrópico em grandes escalas, e está em expansão. A homogeneidade e isotropia podem ser incorporadas às equações (1,2,3) supondo que a densidade e a pressão são funções puramente do tempo: $\rho = \rho(t)$ e $p = p(t)$. Por outro lado, a expansão de um universo homogêneo e isotrópico pode ser descrita pela lei de Hubble, tal que,

$$\vec{v} = H\vec{r}, \quad (4)$$

onde \vec{v} é o campo de velocidade dos objetos que compõem o universo, medido por um dado observador, e \vec{r} é a distância daqueles objetos a esse observador. Devido à isotropia e homogeneidade, podemos supor que H , denominado fator de Hubble, depende unicamente do tempo, $H = H(t)$. É conveniente escrever o fator de Hubble em termos de uma função $a = a(t)$, conhecida como *fator de escala*, tal que,

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (5)$$

Inserindo estas definições nas equações (1,2,3), obtemos as seguintes equações:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho, \quad (7)$$

$$\nabla\phi = \frac{4\pi G}{3}\rho\vec{r}. \quad (8)$$

Observe-se que a pressão não se faz mais presente, o que é natural neste contexto, pois devido à homogeneidade e isotropia o gradiente de pressão é nulo. A solução dessas equações é direta:

$$a = a_0 t^{2/3}, \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 = \rho_0 t^{-2}. \quad (9)$$

É possível estudar perturbativamente essa configuração. Tal estudo é fundamental para a análise do processo de formação de estruturas (galáxias, aglomerados de galáxias, etc.) em um universo em expansão. Isto é feito introduzindo pequenas flutuações em torno das soluções encontradas anteriormente:

$$\tilde{\rho} = \rho + \delta\rho, \quad \tilde{\vec{v}} = \vec{v} + \delta\vec{v}, \quad \tilde{\phi} = \phi + \delta\phi, \quad (10)$$

onde $\delta\rho$, δp , $\delta\vec{v}$ e $\delta\phi$ representam as pequenas flutuações em torno das soluções encontradas anteriormente. Um cálculo relativamente longo, mas padrão, restando unicamente os termos lineares nas quantidades perturbadas, leva à equação para o *contraste na densidade* δ , definido como,

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho}, \quad (11)$$

tal que,

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + \left\{ k^2 \frac{c_s^2}{a^2} - 4\pi G\rho \right\} \delta = 0. \quad (12)$$

Nessa expressão, $c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ é a velocidade do som, e k é o número de onda associado à decomposição de Fourier, $f(t, \vec{x}) = f(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$.

Note-se que a equação (12) tem a forma da equação de um oscilador harmônico amortecido (o amortecimento ocorrendo graças à expansão do universo), onde dois efeitos competitivos definem o crescimento do contraste da densidade: a velocidade do som do fluido, que gera oscilações no comportamento de δ e a atração gravitacional, que tende a induzir a condensação das perturbações.

Uma outra aplicação importante das equações (1,2,3) se refere ao equilíbrio estelar. Neste caso, consideramos uma configuração estática e radial, o que implica $\vec{v} = 0$ e que todas as funções restantes (ρ , p e ϕ) dependem unicamente da coordenada radial. Assim, o sistema acima se reduz a ao seguinte conjunto de equações:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{d\phi}{dr}, \quad (13)$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (14)$$

Estas equações podem ser re-escritas como,

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\rho m(r)}{r^2}, \quad (15)$$

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (16)$$

Em geral, as estrelas podem ser modelizadas por fluidos barotrópicos, definidos como sendo aqueles em que a pressão depende apenas da densidade da matéria, $p = p(\rho)$. Em particular, uma dependência do tipo de lei de potência, do tipo $p = K\rho^n$, onde K e n são constantes, se revela bastante conveniente. As estrelas mais comuns, representadas no diagrama de Hertzsprung-Russel, podem ser descritas, grosso modo, por estas expressões. A equação (15) re-escrita usando os fluidos barotrópicos sob a forma de lei de potência, e feita sem dimensão, é denominada de *equação de Lane-Emden*.

3 A teoria da Relatividade Geral

Existem duas principais diferenças da teoria da Relatividade Geral em relação à sua antecessora, a gravitação newtoniana. Em primeiro lugar, o princípio relativista de uma velocidade limite na natureza é incorporado. Em segundo lugar, a noção de força gravitacional é substituída pela de curvatura do espaço-tempo. A introdução da velocidade limite torna a nova teoria gravitacional

compatível com a teoria da relatividade restrita. A geometrização da interação gravitacional permite introduzir na nova teoria o princípio de equivalência, que estabelece na sua forma fraca, que todos os corpos reagem da mesma forma ao campo gravitacional, independentemente de sua massa. Assim, todos corpos seguem geodésicas no espaço-tempo, suposto curvo e com estrutura geométrica riemanianna. Desvios das trajetórias geodésicas ocorrem apenas quando os corpos são submetidos a forças não-gravitacionais.

A geometria da teoria da Relatividade Geral é definida no espaço-tempo quadridimensional. A distância infinitesimal entre dois pontos nesta geometria é fornecida pela métrica,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (17)$$

onde adotamos a convenção da soma, segundo a qual índices repetidos supõem uma somatória, e $g_{\mu\nu}$ são os coeficientes métricos que definem localmente a geometria do espaço-tempo a quatro dimensões.

As equações de Relatividade Geral são equações tensoriais, onde o lado esquerdo está relacionado à geometria do espaço-tempo, e o lado direito descreve a distribuição de matéria e energia. Essas equações têm a forma,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}, \quad (18)$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0. \quad (19)$$

Na equação (18), $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, definido por,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma, \quad (20)$$

sendo $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ a conexão christoffeliana, definida por,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (21)$$

O escalar de Ricci é definido como $R = g^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}$. Por sua vez, o tensor de momento-energia $T_{\mu\nu}$ depende do tipo de matéria ou campo que estamos considerando. Para um fluido perfeito com quadri-velocidade u_μ , ele tem a forma,

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}. \quad (22)$$

A equação (19) é consequência das chamadas identidades de Bianchi, que estabelece que a quadri-divergência do lado esquerdo da equação (18) é identicamente zero.

Na descrição cosmológica, usa-se o fato que o universo é, em grande escala, homogêneo e isotrópico. Assim, a métrica tem a seguinte forma,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (23)$$

onde assumimos que o a seção espacial tri-dimensional é plana, e $a(t)$ é o fator de escala. Neste caso, as equações (18,19) se reduzem a,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi G\rho, \quad (24)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -8\pi G\frac{p}{c^2}, \quad (25)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0. \quad (26)$$

Devido às identidades de Bianchi, apenas duas destas equações são independentes. Observe que a pressão desempenha um papel determinante no comportamento de $a(t)$ ao contrário do que ocorre na cosmologia newtoniana descrita na seção anterior.

As soluções de (24,25,26) dependem da equação de estado do fluido. Para uma dependência linear da pressão com a densidade, $p = \omega\rho c^2$, ω constante, essas equações podem ser facilmente resolvidas, implicando em,

$$a = a_0 t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}. \quad (27)$$

Quando $\omega = -1$ (que corresponde a chamada equação de estado do vácuo quântico), o fator de escala cresce exponencialmente. Apenas quando a pressão é nula, $\omega = 0$, a solução relativista coincide com a solução newtoniana. No entanto, para o caso de um universo dominado por um fluido radiativo, caracterizado por $\omega = 1/3$, o fator de escala evolui como $a \propto t^{1/2}$, o que difere do caso newtoniano. Para um universo dominado por energia escura, para o qual $\omega < -1/3$ a diferença é ainda mais pronunciada: o universo expande aceleradamente, algo impossível de se obter no caso newtoniano, devido à natureza puramente atrativa da gravitação. Lembramos que as observações indicam que o Universo deve ser atualmente dominado por energia escura.

As dificuldades conceituais e técnicas da teoria da Relatividade Geral se tornam consideráveis quando se procura estudar perturbações em torno do modelo cosmológico descrito acima. Um dos motivos é a alta não-linearidade das equações da Relatividade Geral. Outro motivo é que essas equações são invariantes por difeomorfismo, o que implica invariância por transformações gerais de coordenadas. Este último fato gera dificuldades em identificar quais são as perturbações físicas e quais são os efeitos da escolha de um sistema de coordenadas. Estas dificuldades geraram diversos formalismos para abordar o problema perturbativo em cosmologia, e identificar os observáveis físicos. No entanto, o problema se simplifica consideravelmente quando a pressão é nula. Neste caso, o contraste na densidade se comporta como,

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G(1+\omega)(1+3\omega)\rho\delta = 0. \quad (28)$$

Esta equação perturbada se assemelha com a newtoniana correspondente mostrada na seção precedente, em duas situações; quando a velocidade do som é

nula (o que implica novamente pressão nula), e neste caso as equações coincidem; quando o número de onda k é nulo, o que implica perturbações em grandes escalas. Neste último caso, no entanto, as soluções são diferentes do caso newtoniano correspondente, devido ao comportamento do fator de escala; a correspondência é completa unicamente no caso de pressão nula, novamente.

O caso do equilíbrio de uma estrela é bem mais complexo na teoria da Relatividade Geral. A equação do equilíbrio hidrodinâmico estelar lê-se, neste caso, como [10],

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G}{r^2} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{m(r) + 4\pi r^3 \frac{p}{c^2}}{\left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} \right)} \quad (29)$$

Esta é equação *TOV*, acrônimo para Tolman-Oppenheimer-Volkoff, os primeiros autores a estudar o problema do equilíbrio estelar no contexto da relatividade geral. A equação TOV se reduz à equação newtoniana correspondente apenas quando se toma o limite $c \rightarrow \infty$, o que implica desconsiderar a existência de uma velocidade da luz na natureza, condição imposta pelo princípio relativista. De uma forma geral, as condições para o equilíbrio estelar em Relatividade Geral são bem diferentes das condições newtonianas correspondentes. Essas diferenças, no entanto, são desprezíveis quando a pressão não é muito importante, comparada com a densidade de matéria, o que ocorre para boa parte das estrelas que formam a sequência principal no diagrama de Hertzsprung-Russel. No entanto, para objetos compactos, como as estrelas de nêutrons, os resultados relativistas são diferentes dos newtonianos, tanto qualitativa quanto quantitativamente.

Neste momento podemos definir o que entendemos por campo fraco (quando a teoria newtoniana pode ser usada) e campo forte (quando a teoria relativista deve forçadamente ser usada). Para isto, definimos a grandeza sem dimensão $k = GM/(Rc^2)$, que nada mais é que o potencial gravitacional dividido pela velocidade da luz ao quadrado. Esta quantidade fornece a razão entre o efeito gravitacional e o efeito relativista. Quando $k \ll 1$ temos o campo fraco; quando k é da ordem da unidade os efeitos relativistas são consideráveis e estamos no regime de campo forte.

4 As teorias neo-Newtonianas

A teoria da Relatividade Geral descrita na seção precedente tem como base o princípio da equivalência. O princípio da equivalência estabelece que todos os corpos reagem ao campo gravitacional da mesma forma, independentemente de sua massa. Uma das consequências diretas disto é que, localmente, o campo gravitacional é indistinguível de um referencial acelerado. A forma de se introduzir a universalidade do princípio da equivalência é geometrizar a interação gravitacional, fazendo com que o campo gravitacional seja apenas um efeito da curvatura do espaço-tempo a quatro dimensões. Neste caso, todos os corpos sob ação apenas da gravitação seguirão geodésicas nesta geometria curva. Conse-

quentemente, todos os corpos reagem igualmente à gravitação e o princípio da equivalência está automaticamente incorporado.

O princípio da equivalência é baseado na igualdade entre a massa inercial, cujo conceito está relacionado à segunda lei da mecânica newtoniana, e a massa gravitacional, definida pela lei da gravitação newtoniana. Podemos, no entanto, definir três tipos de massa: a inercial, definida acima, a gravitacional passiva e a gravitacional ativa. A massa inercial indica como um corpo reage a uma força arbitrária conforme a famosa lei de força $\vec{F} = m\vec{a}$; a massa gravitacional passiva determina como um corpo reage ao campo gravitacional; e a massa gravitacional ativa indica como um corpo cria o campo gravitacional. O princípio da equivalência, na sua forma fraca, implica a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional passiva. No entanto, existem outras formulações do princípio da equivalência, podendo implicar a igualdade dos três tipos de massa.

Nosso objetivo agora é tentar criar uma formulação da teoria newtoniana tal que efeitos típicos da Relatividade Geral sejam incorporados em um contexto espaço-temporal newtoniano (tempo como parâmetro externo universal, espaço tridimensional euclidiano). Uma das consequências da teoria Relatividade, enfatizado na seção anterior, é o papel gravitacional desempenhado pela pressão, isto quando se usa um fluido ou campo como fonte do campo gravitacional. Uma tentativa neste sentido seria identificar a massa inercial e a massa gravitacional passiva como sendo dada por $\rho + p$, ao passo que a massa gravitacional ativa como sendo $\rho + 3p$. Tais identificações parecem arbitrárias, no entanto a nova expressão para a massa gravitacional ativa está intimamente relacionada com a noção de *condição de energia forte*, que diz, no contexto da teoria da Relatividade Geral, quando uma configuração gravitacional (considerando a pressão) possui efeito atrativo ou repulsivo.

Segundo a proposta de construção de uma teoria neo-newtoniana, incorporando efeitos relativistas à teoria newtoniana, descrita acima, as novas equações da continuidade, de Euler e de Poisson teriam a seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho + p)\vec{v}] = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho + p} - \nabla \phi, \quad (31)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G(\rho + 3p). \quad (32)$$

Observe-se que a corrente de matéria e a segunda lei de Newton incorporam os novos conceitos de massa inercial e massa gravitacional passiva, ao passo que a nova equação de Poisson utiliza o novo conceito de massa inércia ativa. Por simplicidade, nas expressões acima utilizamos um sistema de coordenadas onde $c = 1$.

Uma outra possibilidade de se construir uma teoria neo-newtoniana da gravitação consiste em utilizar argumentos termodinâmicos ao se rescrever a equação da continuidade. De fato, a identificação descrita acima para a massa inercial é incompleta: na equação da continuidade, o termo com derivada temporal (associado à massa contida em um volume V) continua tendo a forma anterior.

Isto foi feito para guardar contato com o limite da teoria da Relatividade Geral na aproximação de campo fraco e baixas velocidades, quando a teoria deve se reduzir à newtoniana no limite de ordem zero, com correções em primeira ordem. No entanto, podemos modificar a equação da continuidade ao evocar a primeira lei da termodinâmica e o papel que a pressão nela exerce: a pressão está relacionada ao trabalho realizado quando o volume do sistema se expande. A expansão do volume por sua vez está relacionado ao divergente do campo de velocidade.

Baseado nas considerações acima, podemos propor o novo conjunto de equações como sendo o seguinte:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + p \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho + p} - \nabla \phi, \quad (34)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G(\rho + 3p). \quad (35)$$

As equações (30,31,32) definirão o que chamaremos daqui por diante de *teoria neo-newtoniana tipo I* (NNI), enquanto as equações (33,34,35) definirão a *teoria neo-newtoniana tipo II* (NNII). Nas próximas seções analisaremos as consequências destas equações para a cosmologia e a condição de equilíbrio estelar.

5 Teorias neo-newtonianas em Cosmologia

Como já comentado anteriormente, uma abordagem newtoniana para a evolução do cosmos utiliza conceitos da mecânica dos fluidos. Nesse caso, adotando o princípio cosmológico e a lei de Hubble, define-se o campo de velocidades deste fluido que compõe o universo como sendo $\vec{v} = H\vec{r}$. Além disto, a pressão e a densidade dependem unicamente do tempo. Quando utilizamos, neste contexto, as equações newtonianas usuais, (1,2,3), obtemos um comportamento que independe da pressão. Isto era esperado, pois em um universo homogêneo e isotrópico o gradiente de pressão é nulo, e consequentemente as soluções obtidas são as mesmas para qualquer tipo de expressão que consideramos para a pressão. No entanto, as equações da Relatividade Geral dependem crucialmente da pressão, mesmo sob as hipóteses de homogeneidade e isotropia. No jargão usual, a pressão *gravita*.

As modificações introduzidas no âmbito da teoria newtoniana por suas extensões ditas neo-newtonianas modificam substancialmente essa situação: as equações (30,31,32) e (33,34,35) fornecem exatamente o mesmo tipo de evolução para a dinâmica de fundo do universo, quando se considera as hipóteses de homogeneidade e isotropia. Basicamente, obtemos as leis de Friedmann para o fator de escala $a(t)$, descritas pelas equações (24,25,26). A real diferença entre estes conjuntos de equações surge ao se estudar o comportamento das pequenas perturbações associadas a densidade de matéria $\delta\rho$. Como nesse caso existem

gradientes das perturbações da pressão, percebe-se que (30) e (33) podem conduzir a resultados distintos. Disso, como veremos a seguir, chega-se a conclusão que NNII é o sistema ideal para a cosmologia.

A introdução de pequenas perturbações em torno da solução cosmológica no contexto do conjunto de equações (30,31,32), fornece (após a linearização descrita na seção 2 e da decomposição em modos de Fourier) a seguinte equação para a evolução do contraste na densidade[8]:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + \left\{ \frac{c_s^2}{a^2}k^2 - 4\pi G(1+\omega)(1+3\omega)\rho \right\}\delta = -\frac{\ddot{a}}{a}\omega k^2\delta - \frac{\dot{a}}{a}\omega \vec{k} \cdot \nabla \dot{\delta}. \quad (36)$$

Ao deduzir esta equação consideramos uma equação de estado do tipo $p = \omega \rho c^2$, com ω constante. Esta é uma equação bastante distinta da que deduzimos anteriormente, sobretudo devido aos termos que aparecem no seu lado direito da igualdade. No entanto, quando a pressão é nula, ou quando as escalas são suficientemente grandes tais que o número de onda pode ser desprezado, então reobtemos a mesma equação que na teoria da Relatividade Geral, sob condições similares.

No caso da teoria NNII, a equação perturbada correspondente que descreve a evolução do contraste na densidade, assume a seguinte forma:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + \left\{ \frac{c_s^2}{a^2}k^2 - 4\pi G(1+\omega)(1+3\omega)\rho \right\}\delta = 0. \quad (37)$$

Esta ainda não é a equação relativista (cuja forma, é preciso lembrar, depende do formalismo utilizado). Em geral, a equivalência pode não ser completa [11]. No entanto, neste novo caso as diferenças são muito menos notáveis. Em alguns casos, porém, as diferenças são muito pouco importantes, e isto não apenas para perturbações em grandes escalas: perturbações em pequena escalas também podem ser enfocadas coerentemente na teoria NNII.

A última afirmação acima foi demonstrando no artigo [12], onde se analisou o caso de um universo homogêneo e isotrópico preenchido por um fluido viscoso. Utilizando tal componente dissipativa, tenta-se dar aos fluidos cósmicos um caráter mais realista. A viscosidade foi descrita no âmbito do formalismo de Eckart. No caso relativista a pressão viscosa assume a forma,

$$p = -\xi_0 \rho^\nu u_{\mu;\mu} = -3\frac{\dot{a}}{a}\xi_0 \rho^\nu, \quad (38)$$

onde ξ_0 e ν são constantes, e a hipótese de um universo homogêneo e isotrópico foi utilizada. No contexto newtoniano, esta expressão é dada por,

$$p = -\xi_0 \rho^\nu \nabla \cdot \vec{v} = -3\frac{\dot{a}}{a}\xi_0 \rho^\nu, \quad (39)$$

Quando se usa a teoria NNII, obtém-se, após um cálculo longo, mas direto, a seguinte expressão para a evolução no contraste na densidade:

$$\ddot{\delta} + \left(2H - 3H\omega - \frac{\dot{\omega}}{1+\omega} \right) \dot{\delta} + \left[-4\pi G\rho(1+\omega) - 6H^2\omega - 3\dot{H}\omega - \frac{3H\dot{\omega}}{1+\omega} \right] \delta = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\nabla^2 \delta p}{a^2 \rho} - 3H \frac{\dot{\delta p}}{\rho} + \frac{\delta p}{\rho} \left[12\pi G \rho (1 + \omega) - 15H^2 - 9H^2 \omega + \frac{3H\dot{\omega}}{1 + \omega} - 3\dot{H} \right].$$

Nesta equação, $H = \frac{\dot{a}}{a}$, $\omega = p/\rho$, e δp é a perturbação do termo da pressão viscosa.

A equação relativista correspondente no calibre síncrono não possui uma forma simples em termos de uma equação única. Ao contrário, as perturbações obedecem ao seguinte sistema de equações:

$$\dot{\delta} = -(1 + \omega) \left(\frac{\theta}{a} - 3\dot{\phi} \right) + 3H\omega\delta - 3H \frac{\delta p}{\rho}; \quad (41)$$

$$\dot{\theta} = -H(1 - 3\omega)\theta - \frac{\dot{\omega}}{1 + \omega}\theta + \frac{k^2}{a(1 + \omega)} \frac{\delta p}{\rho} + \frac{k^2}{a}\phi, \quad (42)$$

onde $\theta = ik^j v_j$ é a divergência da velocidade perturbada do fluido e ϕ está relacionado às perturbações na métrica.

Apesar da estrutura aparentemente muito diferente do caso neo-newtoniano e do caso relativista, quando se considera perturbações que se encontram na faixa das observações disponíveis hoje (aproximadamente entre dezenas e centenas de megaparsecs), os resultados são muito similares, como mostra, a título puramente exemplificativo, a figura 1.

O fato que, para escalas de interesse observacionais os resultados da teoria NNII são essencialmente idênticos aos relativistas, abre perspectivas muito interessantes, sobretudo no que diz respeito ao estudo de simulações numéricas. Estes estudos procuram determinar a formação das estruturas locais (galáxias por exemplo), e requerem uma formulação newtoniana. No momento, se emprega o formalismo newtoniano usual. Mas, existe possibilidade de se ter, a partir dos resultados acima, um formalismo neo-newtoniano consistente.

6 Teorias neo-newtonianas e o equilíbrio estelar

O problema de equilíbrio estelar é outro campo importante de aplicação de teorias gravitacionais. O equilíbrio de uma estrela é mantido pelo balanço do gradiente da pressão no seu interior, provocado pelas reações nucleares que geram a energia emitida pela estrela, e a atração gravitacional, que tende a colapsar a estrela. As diversas fases da vida de uma estrela, representadas em sua maioria no diagrama de Hertzsprung-Russel, revelam os diversos mecanismos de *queima* da fusão nuclear no interior das estrelas. Estas fusões são responsáveis pela geração de elementos químicos do Hélio até o ferro. A partir do ferro, os processos de explosão estelar (supernovas) é que sintetizaram estes elementos mais pesados. O deutério, por sua vez, é sintetizado no universo primordial, em seus primeiros minutos de existência.

Para as estrelas ordinárias, o valor absoluto da pressão não é comparável à densidade de energia, mesmo que o seu gradiente possa ser muito grande. No entanto, a vida de uma estrela pode conduzir, no seu fim, a objetos compactos. O primeiro seriam as anãs brancas, estrela *fria* que não gera mais energia

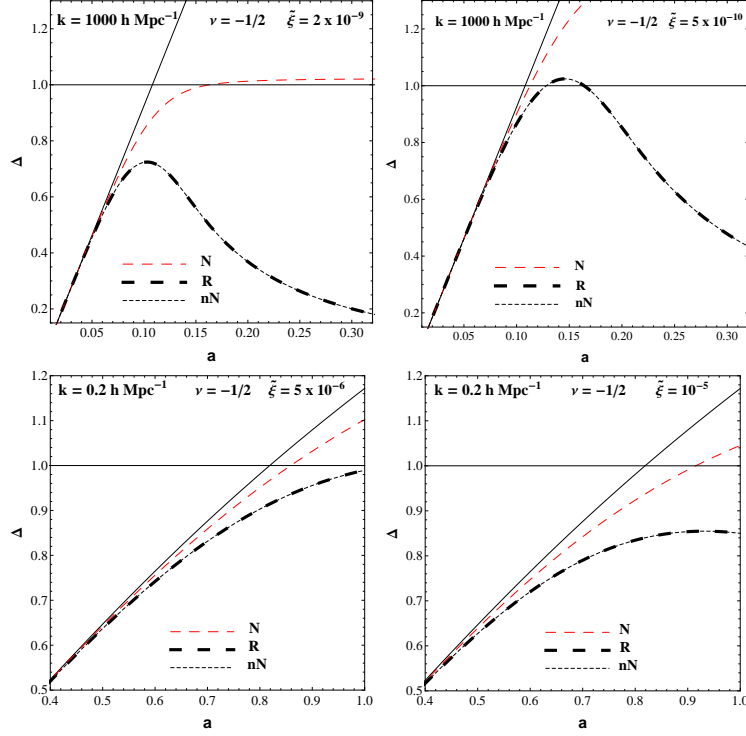


Figura 1: Crescimento das perturbações correspondentes a galáxias anãs, $k = 1000h\text{Mpc}^{-1}$ (painéis superiores) e escalas galáticas, $k = 0.2h\text{Mpc}^{-1}$ (painéis inferiores) assumindo $\nu = -1/2$ na teoria de Eckart. Linhas sólidas correspondente ao modelo cosmológico padrão (Λ CDM), ao passo que a linha vermelha pontilhada refere-se à teoria newtoniana usual para o caso viscoso, a linha azul para a teoria neo-newtoniana e a linha pontilhada preta ao caso relativista viscoso. As linhas horizontais delimitam o regime não linear.

e cuja configuração de equilíbrio é determinada pela degenerescência quântica eletrônica. Apesar de fazer uso de conceitos tipicamente quânticos para a compreensão de seu estado de equilíbrio, a anã branca ainda pode ser descrita pela gravitação newtoniana.

O segundo objeto compacto, com raio e densidade muito maiores que as anãs brancas, seriam as estrelas de nêutrons, onde a atração gravitacional é compensada pela degenerescência quântica dos nêutrons. Neste caso, os efeitos gravitacionais relativistas já se tornam consideráveis: estrelas de nêutrons possuem massa de algumas massas solares, comprimidas em um volume de raio de alguns quilômetros. Isto implica densidades da ordem de,

$$\rho = \frac{M}{V} \sim \frac{10^{33}}{10^{18}} \frac{g}{cm^3} \sim 10^{15} \frac{g}{cm^3}, \quad (43)$$

densidade esta que é típica da matéria nuclear.

Em geral, para definir a importância dos efeitos relativistas se usa o indicador dimensional definido na seção 3, $k = \frac{GM}{Rc^2}$. Quando um objeto, com raio R e massa M possui um $k \gtrsim 1$, os efeitos relativistas não podem ser ignorados. No caso das estrelas de nêutrons, $k \sim 0,1$. Nesta situação, o uso da teoria da Relatividade Geral para descrever as estrelas de nêutrons não pode ser evitado.

A equação que descreve o equilíbrio estelar na teoria gravitacional newtoniana é a de Lane-Emden, mostrada ao fim da seção 2. A sua correspondente relativista é a equação TOV mostrada na seção 3. No caso das teorias neo-newtonianas, podemos também deduzir uma equação de equilíbrio estelar utilizando as hipóteses de estaticidade ($\vec{v} = 0$) e de dependência apenas da coordenada radial para a densidade, pressão e potencial gravitacional. Seguindo os mesmos passos que conduziram à equação de Lane-Emden, obtemos a seguinte equação para o equilíbrio estelar para as duas teorias neo-newtonianas descritas na seção 4:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}(\rho + p), \quad (44)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi Gr^2(\rho + 3p). \quad (45)$$

Essas equações diferem tanto da sua correspondente newtoniana quanto da equação TOV da Relatividade Geral. No entanto, elas têm uma estrutura mais próxima da equação relativista, com a pressão tendo um papel mais relevante que no caso puramente newtoniano.

Na figura 2 utilizamos um modelo bem simples para a configuração estelar onde apenas nêutrons formam um gás de Fermi degenerado no interior estelar. Mostramos o diagrama massa-raio para as estrelas de nêutrons, para os três casos: o newtoniano, o relativista e o neo-newtoniano [13]. A equação newtoniana prevê a possibilidade de formação de objetos indefinidamente compactos, em contradição com a observação, que prevê um limite neste diagrama, mostrado pelo máximo no diagrama massa-raio; as teorias neo-newtonianas reproduzem o resultado qualitativo relativista, mas prevêem a possibilidade de objetos com maior densidade que no caso relativista.

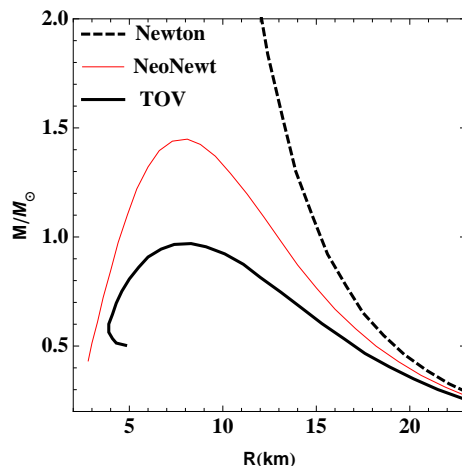


Figura 2: Diagrama massa-raio para as estrelas de neutrões utilizando a teoria newtoniana, a Relatividade Geral (TOV) e a teoria neo-newtoniana. O raio é dado em quilômetros e a massa em unidades de massa solar, M_{\odot} .

Na análise neo-newtoniana há uma dificuldade que merece ser citada. Temos três definições de densidade: ρ , $\rho + p$ e $\rho + 3p$. Qual delas deveremos utilizar no diagrama massa-raio? Esta é uma questão cuja resposta é pouco clara. No caso da figura 2 utilizamos a definição usual, que coincide com a newtoniana. O emprego das outras possibilidades preservaria qualitativamente os resultados descritos acima, mas modificaria os valores absolutos mostrados na figura 2.

7 Observações Finais

Neste ano de 2015 se comemoram os 100 anos da teoria da Relatividade Geral, a moderna teoria da gravitação apresentada na referência [14] em 1915. A teoria da Relatividade Geral visava corrigir dois aspectos incompletos da teoria gravitacional newtoniana: a ausência da noção de uma velocidade limite na natureza, a velocidade da luz, necessária devido à universalidade da teoria da Relatividade Restrita; incorporar de forma consistente o princípio da equivalência, que estabelece a igualdade entre as massas inercial e gravitacional, conforme indicado pela experiência. A teoria da Relatividade Geral logrou também explicar alguns fenômenos gravitacionais, que do ponto de vista newtoniano apareciam como anomalias não recebendo nenhuma explicação plausível, como o avanço do periélio de Mercúrio. A teoria da Relatividade Geral recebeu formidáveis confirmações observacionais e experimentais, como descrito na referência [15].

No entanto, a teoria newtoniana continua sendo ainda empregada na maior parte das situações. Em primeiro lugar, porque a teoria da Relatividade Geral conduz na maior parte dos casos a correções pequenas - e, frequentemente,

negligenciáveis - à teoria newtoniana. Em segundo lugar, porque o arcabouço matemático e conceitual da teoria newtoniana é sensivelmente mais simples; a teoria newtoniana também se acorda mais facilmente à intuição comum.

Por outro lado, existem situações onde é impossível ignorar a teoria da Relatividade Geral. Dois exemplos são a cosmologia, na maior parte das fases da evolução cósmica, e os objetos astrofísicos compactos, como estrelas de neutrões. No caso da cosmologia, existe uma coincidência entre as previsões newtonianas e relativistas para a fase material, quando a pressão é nula, mas nas fases primordial, radiativa e acelerada do universo, a descrição newtoniana é inteiramente inadequada, principalmente porque a teoria newtoniana não é capaz de incorporar efeitos da pressão em um universo homogêneo e isotrópico. No caso de objetos compactos, e especificamente no caso das estrelas de neutrões, a teoria newtoniana é incapaz de prever a relação massa-raio observada. Devemos ainda acrescentar que a teoria newtoniana não é capaz de prever a existência de buracos negros, objetos possivelmente existentes em sistemas astrofísicos e galácticos, que se revelam estruturas essencialmente relativistas.

No entanto, a teoria newtoniana continua a ter um papel a desempenhar devido às já mencionadas simplicidades matemáticas e conceituais, e seria desejável estender a formulação newtoniana de forma a incorporar efeitos típicos da Relatividade Geral, isto sem comprometer os aspectos matemáticos e conceituais da teoria newtoniana usual. Tais extensões caracterizam as teorias neo-newtonianas discutidas neste texto. A chave para criar estas extensões se baseia em modificar a maneira como a massa é introduzida na teoria newtoniana, definindo uma nova massa inercial e uma nova massa gravitacional que incorporem os efeitos da pressão.

Discutimos duas possibilidades de se proceder a estas extensões, levando às teorias neo-newtonianas tipo I e II apresentadas anteriormente. A teoria tipo II revelou-se mais promissora, sobretudo devido às suas aplicações à cosmologia: além de reproduzir a evolução do universo não perturbado em todas suas fases, ela fornece resultados perturbativos coerentes com os obtidos na teoria da Relatividade Geral, pelo menos para as escalas de interesse observacional. No entanto, apesar de reproduzir qualitativamente o diagrama massa-raio das estrelas de neutrões, do ponto de vista quantitativo, algumas discrepâncias aparecem. Isto revela que a criação de uma teoria neo-newtoniana que incorpore o essencial dos efeitos relativistas em um contexto matemático e conceitual newtoniano é um projeto ainda em andamento. Por sinal, além das propostas apresentadas aqui, outras propostas surgem na literatura [16].

O fato é que a construção de uma teoria neo-newtoniana seguindo o plano delineado acima teria fortes impactos sobre os estudos de simulação numérica, que visam a reproduzir as estruturas não lineares observadas no universo, assim como o estudo de buracos negros análogos [17]. Esperamos que este programa de pesquisa conduza a resultados de alta relevância científica em um futuro próximo.

Agradecimentos: JCF e HESV agradecem ao CNPq e à FAPES por apoio

financeiro parcia. JCF agradece aos organizadores do **Encontro de Física da Amazônia Caribenha** pela calorosa hospitalidade em Boa Vista, Roraima, durante este evento.

Referências

- [1] A. Friedmann, Z. Phys. **10**, 377 (1922).
- [2] G. Lemaître, Ann. Soc. Sci. de Bruxelles **47**, 49 (1927) [Traduzido para o inglês em MNRAS, 41, 483 (1931)].
- [3] E. P. Hubble, Publ. Natu. Acad. Sci. **15**, 168 (1929).
- [4] E. A. Milne, Quart. J. Math. **5**, 64 (1934).
- [5] E. A. Milne, W. H. McCrea, Quart. J. Math. **5**, 73 (1934).
- [6] W. H. McCrea, Proc. R. Soc. London **206**, 562 (1951).
- [7] E. R. Harrison, Ann. Phys (N.Y.) **35**, 437 (1965).
- [8] J. A. S. Lima, V. Zanchin e R. Brandenberger, MNRAS **291**, L1-L4 (1997).
- [9] J.C. Fabris e H.E.S. Velten, RBEF **4302** (2012).
- [10] S. Weinberg, **Gravitation and cosmology**, Wiley, Nova Iorque (1972).
- [11] R. R. R. Reis, Phys. Rev. D 67, 087301 (2003) [veja *erratum* Phys. Rev. D 68, 089901 (2003)].
- [12] H.E.S. Velten, D.J. Schwarz, J.C. Fabris e W. Zimdahl, Phys. Rev. **D88**, 103522 (2013).
- [13] A.M. Oliveira, H.E.S. Velten, J.C. Fabris e I.G. Salako, Eur. Phys. J. **C74**, 3170 (2014).
- [14] A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 688 (1915).
- [15] C. Will, **Theory and experiment in gravitational physics**, Cambridge university press, Cambridge (1993).
- [16] J-C. Hwang e H. Noh, JCAP **1310**, 054 (2013).
- [17] J.C. Fabris, O.F. Piattella, H.E.S. Velten, I.G. Salako e J. Tossa, Mod. Phys. Lett. **A28**, 1350169 (2013).